LES LOGARITHMES

Introduction historique

Il est courant d'entendre parler de « calculs astronomiques » pour souligner la difficulté de certains calculs. La référence à l'astronomie dans ce domaine n'est pas fortuite. Avant que ne soient inventées les calculettes ou les ordinateurs, les astronomes ont toujours eu besoin d'effectuer des calculs longs et parfois délicats. Au temps de Newton (1643-1727) ou de Halley (1656-1742), aucune machine automatique à calculer ne pouvait remplacer le calcul « à la main ».

Un mathématicien, astronome et physicien écossais, John NAPIER (1550-1617), plus connu en France sous le nom de NEPER, inventa un procédé de calcul très performant qu'utilisèrent tous ceux qui avaient des calculs longs et fastidieux à effectuer. Cette méthode de calcul était encore enseignée en France il y a quelques années, avant la généralisation des calculettes, en classe Terminale notamment.

Les logarithmes décimaux

L'idée était au départ de remplacer les multiplications par des additions et les quotients par des soustractions.

Pour cela on associe deux suites de nombres selon le schéma suivant :

$1 = 10^0 \quad \rightarrow \quad 0$
$10 = 10^1 \quad \rightarrow \quad 1$
$100 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2$
$1000 = 10^3 \quad \rightarrow \quad 3$
…

Remarque : *La suite située à gauche des flèches (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, …) est une progression géométrique de raison 10, la suite située à droite (0, 1, 2, 3,…) est une progression arithmétique de raison 1. Le logarithme décimal apparaît alors comme une fonction qui permet d'associer une suite géométrique de raison 10 à une suite arithmétique de raison 1.*

On étend le procédé aux puissances négatives de 10 :

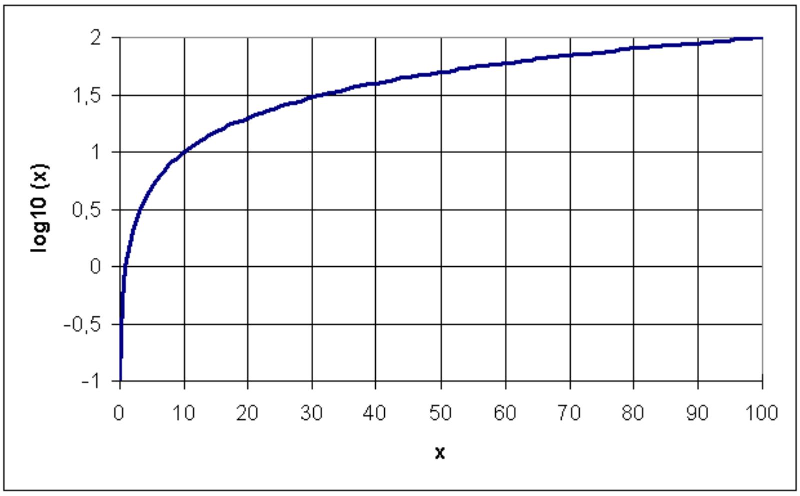
$0{,}1 = 10^{-1} \quad \rightarrow \quad -1$
$0{,}01 = 10^{-2} \quad \rightarrow \quad -2$
$0{,}001 = 10^{-3} \quad \rightarrow \quad -3$
…

Courbe représentative

La fonction ainsi définie (appelée ***logarithme décimal*** ou logarithme vulgaire, et notée log ou $\log_{10}$) permet de transcrire le tableau précédent de la manière suivante :

$\log(1) = \log(10^0) = 0$
$\log(10) = \log(10^1) = 1$
$\log(100) = \log(10^2) = 2$
$\log(1000) = \log(10^3) = 3$
…
$\log(0{,}1) = \log(10^{-1}) = -1$
$\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$
$\log(0{,}001) = \log(10^{-3}) = -3$
…

On peut être amené à construire la courbe représentative de cette fonction ; en voici l'allure :



Propriétés des logarithmes

1) On va retrouver ici la propriété fondamentale des logarithmes (isomorphisme) par un exemple simple :
On a vu que log (10) = 1, log (10^2) = 2 et log (10^3) = 3.
On sait par ailleurs que : 3 = 1 + 2 et $10^3 = 10 \times 10^2$
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\log(10)+\log\left(10^2\right) &= 1+2\\ &= 3\\ &= \log\left(10^3\right)\\ &= \log\left(10\times 10^2\right)\end{aligned}$$

En résumé $\log(10)+\log\left(10^2\right)=\log\left(10\times 10^2\right)$.

Cette propriété est générale et, si *a* et *b* sont des nombres réels strictement positifs

$$\boxed{\log a+\log b=\log(ab)}$$

2) Les autres propriétés des logarithmes se déduisent de celle-ci. Elles sont :

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b \quad (a \text{ et } b \text{ sont strictement positifs})$$

$$\log a^n = n\log a \quad (a \text{ est strictement positif, } n \text{ est un entier positif})$$

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a \quad (a \text{ est strictement positif, } n \text{ est un entier strictement positif})$$

3) Application à la recherche du logarithme d'un nombre strictement positif.

Pour les nombres qui ne sont ni 1, ni 10, ni 100 …, on utilise une table de logarithmes qui fournit une partie du logarithme du nombre (que l'on appelle mantisse). Ainsi :

log 2 = 0,30 103

Le logarithme de 2 se compose de deux parties :

- une partie entière (0), qui indique l'ordre de grandeur du nombre (ici il est compris entre 1 et 10) ; c'est la ***caractéristique*** ;
- une partie décimale (30 103), qui porte le nom de ***mantisse*** et qui est lue sur la table.

On peut déduire le logarithme de 20 de l'exemple précédent :

20 = 2 × 10

Donc, en employant la propriété fondamentale des logarithmes :

log 20 = log (2 × 10) = log 2 + log 10 = 0,30 103 + 1 = 1,30 103

De façon plus générale, on obtient simplement les logarithmes suivants :

log 200 = 2,30 103

log 2 000 = 3,30 103

Dans le cas des nombres inférieurs à 1 on aura :

log 0,2 = log (2 × 10^{-1}) = log 2 + log (10^{-1}) = 0,30 103 + (-1) = -0,69 897

Comme on le verra ci-dessous, ce dernier logarithme peut encore s'écrire : $\bar{1},30\,103$.

Dans cette dernière écriture, la mantisse est positive et la caractéristique est algébrique. Son signe est indiqué (lorsqu'il est négatif) au-dessus. Lorsqu'on effectue un calcul, on fait toujours la somme (arithmétique) des mantisses et la somme algébrique des caractéristiques : cela permet d'accélérer considérablement les calculs.

Cologarithme

Dans le cas du calcul d'un quotient $\frac{a}{b}$ on sait que l'on doit calculer log *a* – log *b*.

On répugne généralement à effectuer des soustractions. Pour les éviter, on remplace un logarithme négatif par son ***cologarithme*** qui est défini de la manière suivante : on change de signe la caractéristique et on lui ajoute -1 (écrit sous la forme $\bar{1}$), puis on retranche tous les chiffres de la mantisse à 9 et le dernier de droite à 10, ainsi :

$$\log\frac{1}{2} = -\log 2 = -0{,}30\,103 = \bar{1}{,}69\,897 = co\log 2$$

Conséquences pratiques

La propriété fondamentale des logarithmes montre que pour effecteur un produit *ab* de deux nombres strictement positifs, il suffit d'ajouter leurs logarithmes.

Exemples

1) Calculer, en utilisant une table de logarithmes décimaux à 5 décimales, le produit suivant :

$$P = 21 \times 86$$

On dispose les calculs selon le schéma suivant :

log 21 = 1,32 222 log 86 = 1,93 450 On lit sur la table : 3,25 672 = log 1 806 donc *P* = 1 806 **Remarque** *Si l'on effectue le calcul à la main, on trouve bien que* 21 × 86 = 1 806.	1,32 222 + 1,93 450 ------------- 3,25 672

2) Calculer, en utilisant une table de logarithmes décimaux, l'expression suivante :

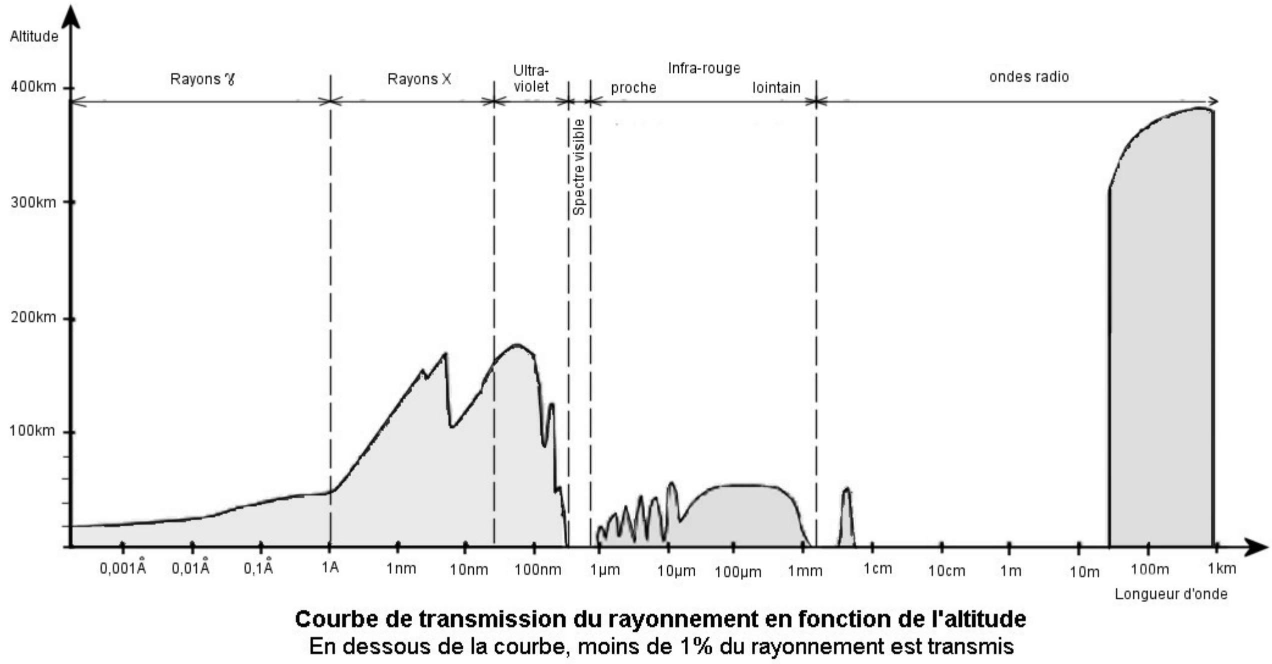
$$M = \frac{25{,}74 \times 5^{12}}{\sqrt{375}}$$

log 25,75 = 1,41 078 log (5^{12}) = 8, 38 764 $\log\frac{1}{\sqrt{375}} = \bar{2}{,}71\,298$ ------------------------- log M = 8,51 140 M ≈ 3,2445 × 10^8 Remarque *Si l'on effectue le calcul avec un ordinateur, on trouve que* M ≈ 3,245 136 43 × 10^8	log 5 = 0,69 897 d'où 12 log 5 = 12 × 0,69 897 = 8,38 764 log 375 = 2, 57 403 d'où $\log\sqrt{375} = \frac{1}{2} \times 2{,}57\,403$ = 1,28 702 et enfin $\log\frac{1}{\sqrt{375}} = co\log\sqrt{375} = \bar{2}{,}71\,298$

Autres utilisations

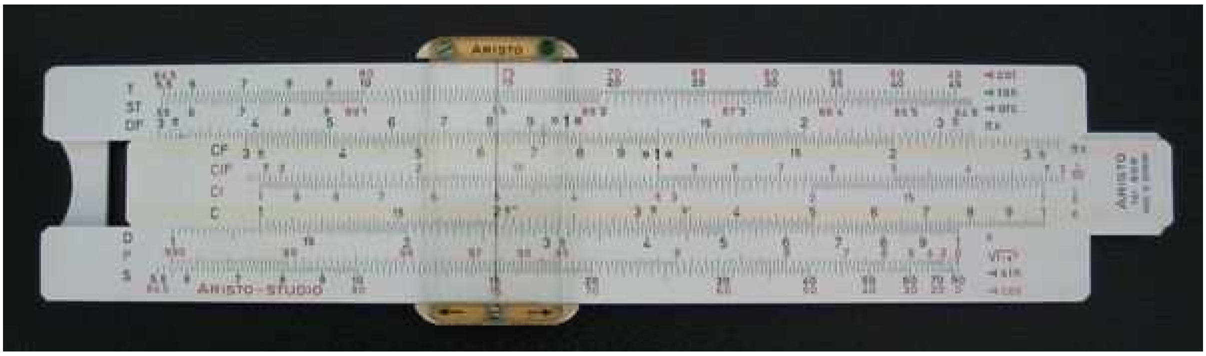
1) Les logarithmes décimaux interviennent dans de nombreuses formules de physique, notamment en astrophysique, avec l'expression de la magnitude absolue d'une étoile : $M = -2{,}5\log L + C$ où L est la luminosité de l'étoile et C une constante.

2) Certaines représentations graphiques de fonctions présentent la particularité d'avoir une très grande étendue de valeurs à placer en abscisse (ou en ordonnée). Pour rendre de tels graphiques lisibles, on utilise des représentations semi-logarithmiques. Ainsi la transmission du rayonnement électromagnétique dans l'atmosphère subit-elle des variations très différentes, suivant que l'on se trouve dans le domaine des très courtes longueurs d'onde (le nanomètre) ou dans le domaine métrique. Pour pouvoir représenter l'ensemble du phénomène, on utilise en abscisse une échelle logarithmique pour décrire l'ensemble des longueurs d'onde.



Exemple de graphique utilisant une échelle logarithmique en abscisse : la transmission atmosphérique suivant le domaine de longueur d'onde.

3) D'autres utilisations des logarithmes ont accompagné les études de ceux qui s'adonnaient aux « sciences exactes » : les fameuses règles à calcul.



Leur principe repose aussi sur les logarithmes : les graduations sont faites en logarithmes. Pour multiplier deux valeurs, on additionne des longueurs. Un curseur mobile sert à effectuer des lectures. Les ordres de grandeur devaient être évalués mentalement.